Attenzione: Siete invitati a consegnare DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– risolvete *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 1, sul secondo –numerato con 2– risolvete** *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

1

1.1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}\right).$$

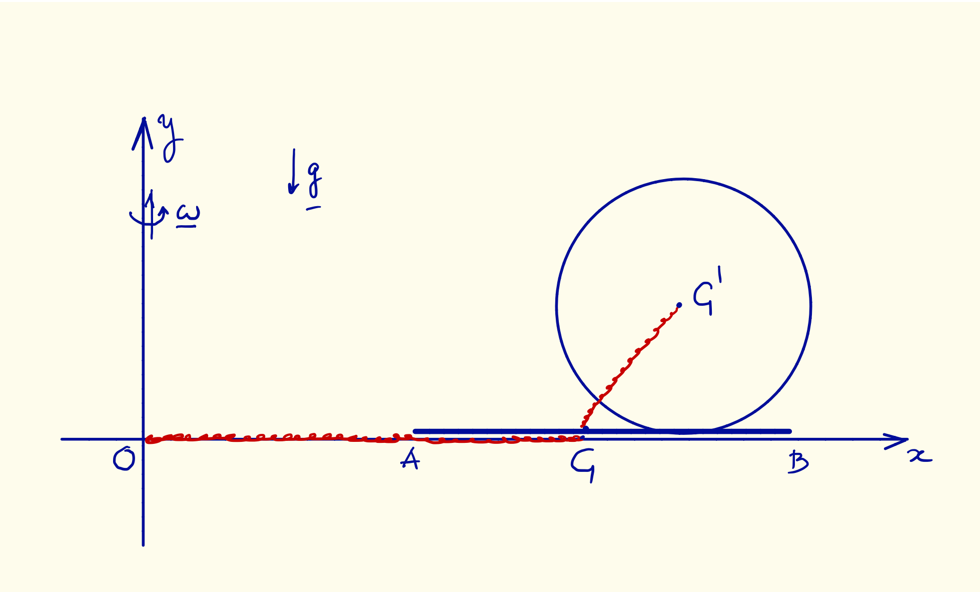
(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si determini, ombreggiando il ritratto in fase e specificando i corrispondenti valori dell'energia totale, l'insieme dei dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

Si osservi che V' si fattorizza con un polinomio di terzo grado. Si suggerisce di cercar zeri del polinomio sostituendo numeri interi; trovate due radici x_1 e x_2, la terza x_3 si può dedurre osservando che il termine noto è offerto dal prodotto delle 3 radici.

1.2 (i) Si enunci e si dimostri il teorema di rappresentazione degli operatori antisimmetrici su $\mathcal{E}_3$.
(ii) Si dimostri la formula fondamentale per le velocità di un sistema di punti in moto rigido. Si definiscano i diversi tipi di atto di moto rigido e si enunci il Teorema di Mozzi (senza dimostrarlo).

2

2.1 Un sistema è costituito da un'asta rigida omogenea AB di massa m mobile lungo l'asse x di un riferimento $Oxyz$ e da un disco di egual massa m e raggio R che rotola senza strisciare *sull'asta* AB ed è vincolato a rimanere nel piano xy, con y verticale ascendente, $\underline{g} = -g\hat{y}$.
Siano G e G' i baricentri dell'asta e del disco, rispettivamente. Tutti i vincoli sono lisci. Tra i punti O e G e G e G' sono tese due molle di costante elastica $h = 4m\omega^2$ e lunghezza a riposo nulla. Il sistema $Oxyz$ ruota rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare costante $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$, $\omega > 0$, parallela all'asse y. Si riferisca il sistema ai parametri Lagrangiani (x, ξ): $x = x_G$ e $\xi = x_{G'} - x_G$.



(i) Si determinino gli equilibri del sistema nel riferimento relativo $Oxyz$ e se ne studi la stabilità.
(ii) Scrivere l'energia cinetica del sistema $T(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi})$, mettendone bene in evidenza la *matrice cinetica*.

2.2(i) Scrivere l'enunciato (formulazione topologica, C^0) del teorema della funzione di Lyapunov per la stabilità semplice di un equilibrio x^* di un sistema dinamico astratto $\dot{x} = X(x)$ e dimostrarlo in dettaglio.
(ii) Accennare all'utilizzo di questo teorema nel caso meccanico a vincoli olonomi, fissi, lisci e con opportune Componenti Lagrangiane di Sollecitazione.

Soluzione all'esercizio 1

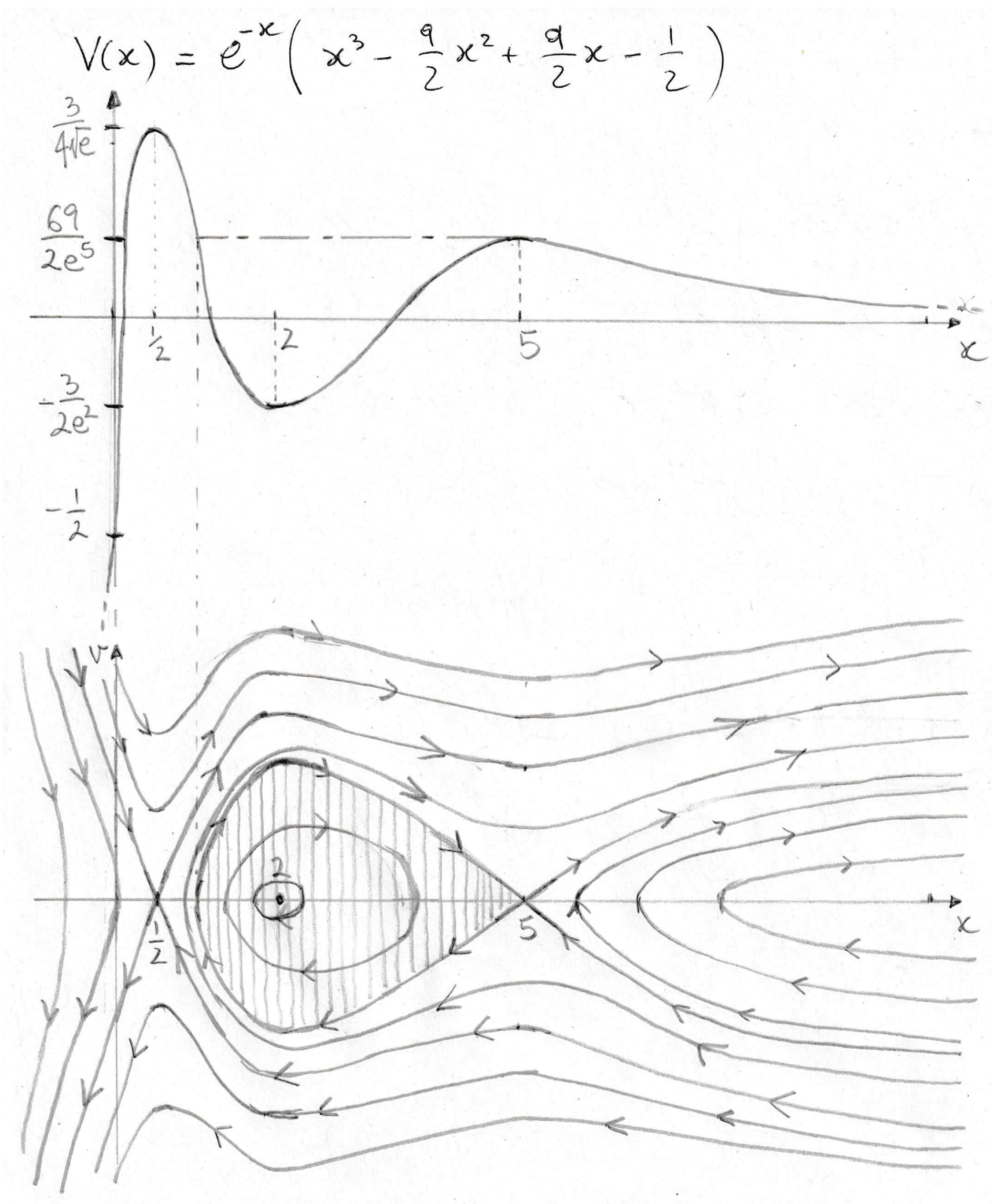
L'energia potenziale $V(x)$ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e tende a 0 per $x \to +\infty$. Calcolando la forza

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}\big(2x^3 - 15x^2 + 27x - 10\big) = e^{-x}(x-5)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

e risolvendo $f(x) = 0$ si identificano i tre punti di equilibrio $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 5$.

Valutando $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-2x^3 + 21x^2 - 57x + 37\right)$, i punti x_1 e x_3 risultano essere massimi locali per $V(x)$, quindi equilibri instabili; mentre x_2 è minimo locale e quindi punto di equilibrio stabile.

I valori dell'energia totale associati ad orbite periodiche sono dati dall'intervallo $[V(x_2), \min\{V(x_1), V(x_3)\}]$, che corrisponde a $[-\frac{3}{2e^2}, \frac{69}{2e^5}]$.



La forza di Coriolis fa lavoro nullo, sia per l'asta sia per il disco: infatti, p.to per p.to per entrambi i due rigidi, la velocità angolare $\underline{\omega}$, la velocità del p.to e il vettore generico spostamento che compete, sono sempre complanari.

Il calcolo della Energia Potenziale Centrifuga, per asta e Disco, fa emergere i momenti d'inerzia rispetto all'asse y

L'uso del t. di Huygens-Steiner ci dà:

$$\mathcal{U}^{(centr.)}(x,\xi) = -\frac{\omega^2}{2} m \left(x^2 + (x+\xi)^2\right) \quad (+\text{ cost.})$$

Il calcolo dell'$\mathcal{U}$. Potenziale elastica:

$$\mathcal{U}^{(el.)}(x,\xi) = \frac{h}{2}\left(x^2+\xi^2\right) \quad (+\text{ cost.})$$

$$\mathcal{U} := \mathcal{U}^{(centr)} + \mathcal{U}^{(el.)} \qquad (h = 4m\omega^2)$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = (h - m\omega^2)x - m\omega^2(x+\xi) = 2m\omega^2 x - m\omega^2 \xi \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = -m\omega^2(x+\xi) + h\xi = -m\omega^2 x + 3m\omega^2 \xi \end{cases}$$

$$m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_E \\ \xi_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists!\ \text{equ}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}(0,0) = m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{l} (i)\ 2 > 0 \\ (ii)\ \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5 > 0 \end{array} : \text{pos def.} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è } \underline{\text{Stabile}}.$$

Velocità angolare del disco: si introduce un angolo ϑ, $R\vartheta = \xi$,

$$T(x,\xi,\dot{x},\dot{\xi}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}+\dot{\xi})^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 2m & m \\ m & \frac{3}{2}m \end{pmatrix}}_{\substack{\mathcal{A} \\ \text{(matrice cinetica)}}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}$$